# Processos Estocásticos
# Parte 1 Probabilidades

**Professora Ariane Ferreira**

Instituto Politécnico
Campus Regional da UERJ
Nova Friburgo - RJ

# Conteúdos

**Parte 1.1 : Conceitos de Probabilidade**
**Parte 1.2 : Variáveis Aleatórias**

## Bibliografia indicada aos alunos

[1] Paul Meyer. Probabilidade - Aplicacões a Estatistica ed. LTC

## Bibliografia usada para elaboração deste curso

[1] Paul Meyer. Probabilidade - Aplicacões a Estatistica, ed. LTC
[2] Magalhães, M.; Moura Neto, F.D. Apostila Probabilidade e Estatistica. Modelos Matemáticos na presença de incertezas.
[3] Montgomery, D.; Runger,D.C. Applied Statistics and Probability for Engineers, 4 ed.J.Wiley
[4] Saporta, G. Probabilités et Statistique – analyse de données, 2 ed.Technip.
[5] Tenenhaus, M. Statistique Méthodes pour décrire, expliquer et prévoir, ed. Dunod.

## Parte 1.1 Conceitos de Probabilidade

- Aleatoriedade
- Experimento Aleatório
- Álgebra dos Eventos Aleatórios
- Incerteza e Risco
- Definições Objetivistas de Probabilidade
- Conceito Subjetivista de Probabilidade (Incerteza)
- Função Probabilidade
- Soma de Probabilidades
- Probabilidade Condicional
- Probabilidade de Eventos Independentes
- Probabilidade Total
- Teorema de Bayes
- Exemplos
- Anexo: Lista de Exercícios 1

# Aleatoriedade

**A Teoria das Probabilidades estuda os fenômenos aleatórios.**

**Fenômeno Aleatório:**

- São os fenômenos cujo resultado não pode ser previsto exatamente.
- Se o fenômeno se repetir, sob as mesmas condições,o resultado não será sempre o mesmo.

**Experimento:**

- É definido como qualquer procedimento que pode ser repetido e que, em cada uma das repetições produz um resultado, isto é, há uma variabilidade nos resultados das realizações do experimento.
- Qualquer fenômeno que possa ser executado pelo homem.

**Experimento determinístico :**

- Sob condições idênticas, os resultados são sempre os mesmos, qualquer que seja o número de ocorrência.

# Experimento Aleatório

**Experimento Aleatório:**

- Um experimento é qualificado de aletório se não se pode prever seu resultado antes de sua conclusão.
- Se o mesmo experimento é repetido em condições idênticas, ele pode ter resultados diferentes.
- Cada experimento pode ser repetido indefinidamente sob as mesmas condições. Embora não saibamos o resultado que irá ocorrer, podemos descrever o conjunto de todos os possíveis resultados.

**Notação:**

- Experimento aleatório: **E**
- Resultado de um experimento aleatório: **elemento $\omega$**
- Conjunto de todos os resultados possíveis (universo dos possíveis) do experimento aletório **E** é chamado de espaço amostral **S (ou $\Omega$ ).**

**Exemplos de Experimentos Aleatórios :**

- Lançamento de uma moeda, lançamento de um dado.

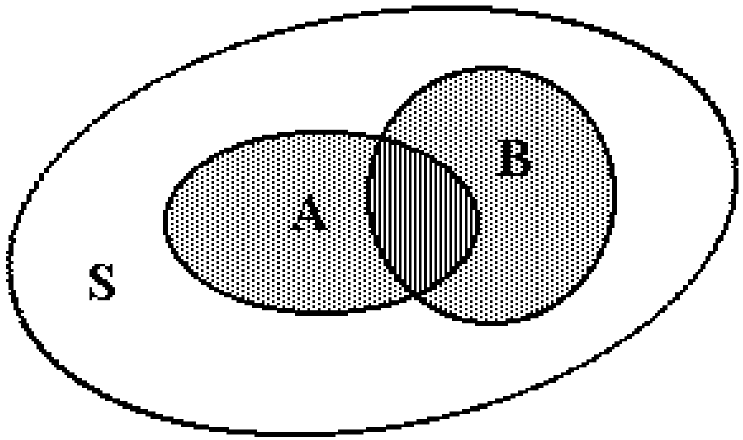
# Espaço Amostral e Eventos

Os resultados de um experimento aleatório podem ser representados em um **espaço amostral** ao qual chamaremos de **S (outra notação Ω)**.

O espaço **S** pode ser uni ou k-dimensional, discreto ou contínuo, finito ou infinito.

**Evento:** É um conjunto de resultados possíveis do experimento. É um subconjunto de S.

A figura a seguir apresenta um espaço bidimensional onde aparecem os eventos A e B.




Como pode ser visto, os eventos **A** e **B** estão completamente contidos em **S** e apresentam interseção, ou seja, a sua ocorrência simultânea é possível.

# Dado um Experimento Aleatório E

**Espaço Amostral: S ( ou Ω)**

•É o conjunto de todos os possíveis resultados do experimento.

**Evento Aleatório: A**

•É um subconjunto do espaço amostral: **$A \subset S$; ($A \subset \Omega$)**

**Evento Certo:**

• O espaço amostral **S**, enquanto subconjunto de si próprio, é chamado de vento certo.

**Evento Impossível: ∅**

•O conjunto vazio ∅ é chamado de evento impossível .

**Eventos Elementares:**

•São os eventos aleatórios que contenham apenas um elemento, **$A = \{\omega\}$.**

# Exemplos de Experimento Aleatório

**Experimento 1:**

- Joga-se um dado. Sai 4 na face superior do dado.

**Notação:**

- Resultado: $\omega$**=4**
- Espaço amostral **S={1,2,3,4,5,6}**

**Experimento 2:**

- Lançamento de uma moeda 20 vezes e obervação do número e caras.
- Espaço amostral **S={0,1,2,3,...,20}**

**Experimento 3:**

- Em uma linha de produção, fabricam-se peças em série.Um experimento aleatório consiste em contar o número de peças defeituosas produzidas em um período de 24h. O número de peças defeituosas vai de 0 a N, N sendo o número total de peças produzidas en 24h.
- Espaço amostral **S={0,1,...,N}**

# Exemplos de Espaço Amostral e Eventos

**Experimento 4:** jogar uma moeda duas vezes.

- Possíveis resultados (espaço amostral): **S = { KK, KC, CK, CC }**
- **Evento: $A_1$** no mínimo uma cara:
- **$A_1$ = {CC, CK, KC}**

**Experimento 5:** Lançar um dado e observar a face voltada para cima.

- Possíveis resultados (espaço amostral) **S = { 1,2,3,4,5,6}**
- **Evento: $A_2$** A ocorrência de face par no lançamento de um dado.
- **$A_2$ = { 2,4,6 }**

# Notação dos Eventos Aleatórios

**Notação :**

Usaremos o símbolo ∅ para representar o conjunto vazio, e uma barra sobre a letra, por exemplo $\overline{A}$ , para representar o complemento de **A**, isto é, o conjunto de pontos que não pertence a **A**.

**S** é o evento certo;

∅ é o evento impossivel;

**Interseção A∩B :** é a ocorrência simultânea de **A e B**

**União A∪B:** é a ocorrência de **A ou B**

$\overline{A}$ é o complemento de **A**

# Eventos Aleatórios

## Evento Complementar

É formado por todos os pontos que pertencem ao espaço amostral **S** mas não pertencem a **A**.

$$\overline{\mathbf{A}} = 1 - \mathbf{A}$$

## Evento Coletivamente Exaustivos

No mínimo um dos eventos deve ocorrer quando o experimento é conduzido.
Experimento de jogar 2 moedas, os quatro possíveis resultados são coletivamente exaustivos.

## Evento Mutuamente Exclusivos (incompatíveis, disjuntos)

Dois ou mais eventos são mutuamente exclusivos quando a ocorrência de um exclui a ocorrência de outro.

$A \cap B = \varnothing$

# Álgebra dos Eventos Aleatórios

**Dados dois eventos A e B**

**Interseção $A \cap B$ :** é a ocorrência simultânea de **A e B**

- O resultado do experimento está necessariamente contido no evento **A** e no evento **B**.
- Conjunto de valores que pertence simultaneamente a A e B.

**União $A \cup B$:** é a ocorrência de **A ou B**

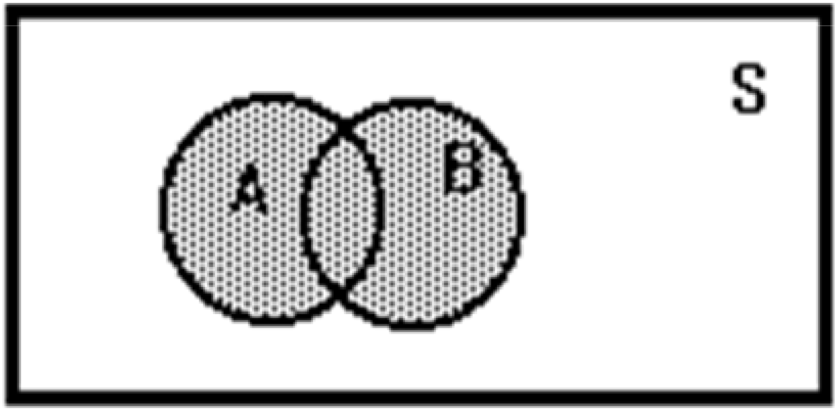
- Contém os resultados do evento **A** unidos aos do evento **B**.
- Conjunto de valores que pertence a **A** ou **B** ou a **ambos.**

**Elemento Favorável :**

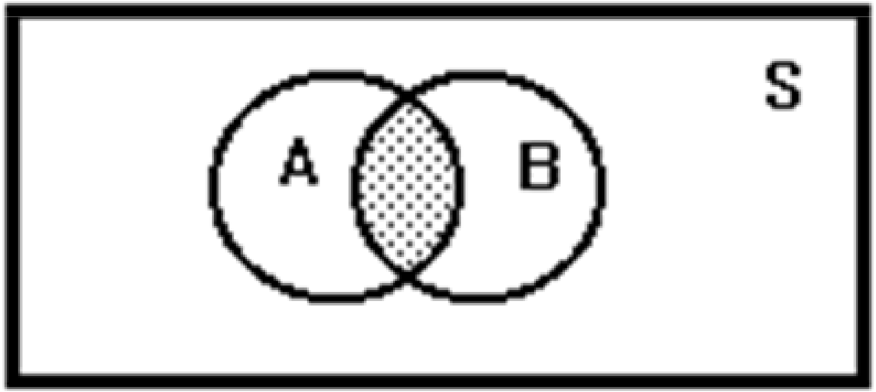
- Se $\omega$ é o resultado de um experimento, $\omega \subset \Omega$ e **A** é um evento, $A \subset \Omega$, então diz-se que
  - $\omega$ é **favorável** à **A** se $\omega \in A$;
  - $\omega$ é **desfavorável** à **A** se $\omega \notin A$

# Diagramas de Venn

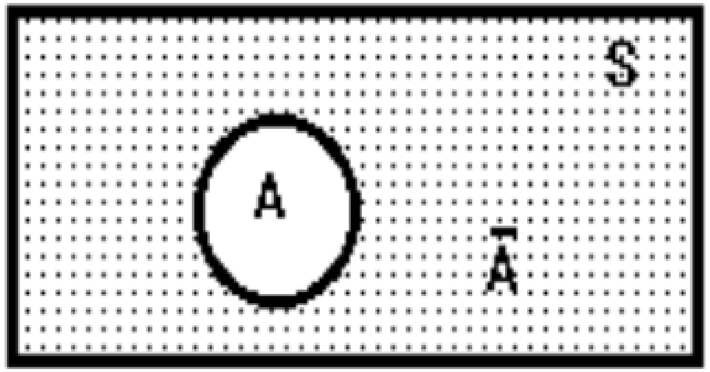
## União: C = A∪B



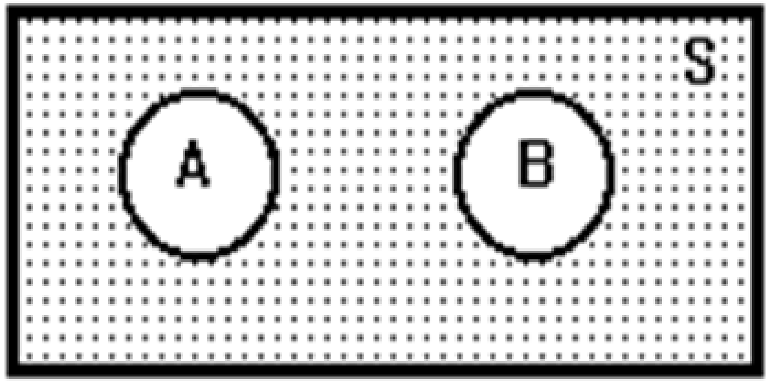

## Interseção: D = A∩B




## Complementar




## Mutuamente exclusivos: E = A∪B=∅



# Álgebra dos Eventos Aleatórios

**Coumutatividade:**

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

**Distributividade:**

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

**Eventos Complementares**

**Complementar :** $(\overline{\overline{\mathbf{A}}}) = \mathbf{A}$ outra representação **(A')'=A**

**Leis de Morgan:** $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cup \overline{\mathbf{B}}$

$$\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$$

# Partição do Espaço Amostral

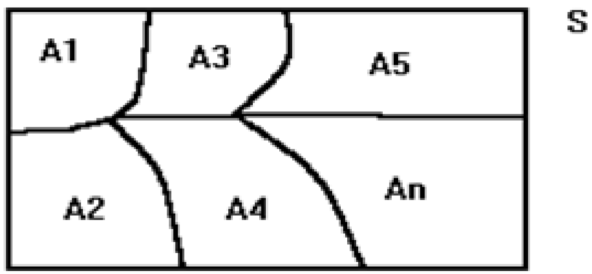
Dizemos que os eventos $\mathbf{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ tornam uma partição do espaço amostral **S** se:

i) $\mathbf{A_i} \neq 0$

ii) $\mathbf{A_i} \cap \mathbf{A_i} = \varnothing$ para $\mathbf{i \neq j}$ ou seja os eventos $\mathbf{A_i}$ são mutuamente exclusivos.

iii) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$ => a união dos eventos $\mathbf{A_i}$ é o espaço amostral **S**.

$$\begin{cases} \forall i \neq j \;\; \mathbf{A}_i \cap \mathbf{A}_j = \varnothing \\ \cup \mathbf{A}_i = \mathbf{S} \end{cases}$$



# Incerteza e Risco

**Decisão e Risco:**

- Suponhamos que tenhamos que tomar uma decisão sobre uma situação sujeita à diversos fatores de incerteza ou aleatoriedade.
- Por exemplo tomar uma decisão antes de um experimento a ser realizado e que o resultado depende de um evento aleatório.
- Podemos definir uma situação de risco ( que é a de tomar uma decisão incorreta, um **ERRO**) com relação aos objetivos fixados.

**Exemplo 1:** Perante um salgadinho que você desconhece se esta próprio ou deteriorado para o consumo, você tem que decidir se come ou não:

**Tabela de possibilidades**

| Decisão\Realidade | Deteriorado | Próprio para consumo |
|---|---|---|
| Não comer | Decisão correta | ERRO |
| Comer | ERRO GRAVE | Decisão correta |

# Incerteza e Risco

## Decisão e Risco:

**Exemplo 2:** No julgamento de um réu, o juiz decreta sentenças (**decisões**) sem conhecer todos os fatos (**Incerteza**). Haverá sentenças corretas e incorretas.

**Haverá ainda uma sentença ainda mais incorreta: condenar um inocente**.

### Tabela de possibilidades

| Sentença\Réu | Inocente | Culpado |
|---|---|---|
| Absolver ( deixar livre) | Decisão correta | ERRO |
| Condenar (manter preso) | ERRO GRAVE | Decisão correta |

# Definições Objetivistas de Probabilidade

Uma variável será chamada aleatória se descreve os resultados de um experimento aleatório.

As probabilidades são utilizadas para exprimir a chance de ocorrência de um determinado evento.

## Conceito Clássico de Probabilidade

Proveniente da teoria dos jogos.

Supõe-se que todos os possíveis resultados de um experimento aleatório são igualmente prováveis.

Existem "**n**" resultados possíveis dos quais "**a**" são favoráveis a ocorrência do evento A.

A probabilidade do evento **A** ocorrer é dada por:

$$P(A) = \frac{a}{n}$$

Número de casos favoráveis

Número de casos possíveis

**Exemplo 3**: Qual a probabilidade de retirar uma dama de um baralho? P(A) = 4 / 52

# Laplace

Considere espaços amostrais com um número finito de elementos (dados, moedas, baralho de 52 cartas).

**Laplace** considerou que em um experimento com ***n*** diferentes resultados, e não havendo nenhuma diferença substancial entre os resultados, as frequências relativas de cada um deles iriam oscilar em torno de **1/n**.

## Limitações do Conceito Clássico de Probabilidade: Experimento de d'Alembert (para cultura geral faça uma pesquisa sobre o célebre paradoxo de Bertrand)

**Exemplo 4:** Jogue um dado e observe a face.

O espaço amostral é S={1,2,3,4,5,6}, há 6 resultados possíveis.

A Probabilidade (`sair uma dada face') =1/6

a) Seja A={1,2,3,4}, P(A) = 4/6=2/3

## Exemplos do Conceito Clássico de Probabilidade (Laplace)

### Exemplo 4: continuação

b) Probabilidade de se obter um número par como resultado de um lançamento de um dado

Seja B={2,4,6}, P(B) = 3/6=1/2=0,5 ou 50%

c) Probabilidade de se obter o número 4 como resultado de um lançamento de um dado:

S = {1,2,3,4,5,6} e C= {4}, então P(C) = 1/6 0,167 ou 16,7 %

d) Probabilidade de se obter um número diferente de 4 no lançamento de um dado:

S = {1,2,3,4,5,6} e A = {1,2,3,5,6}, então p = 5/6 0,833 ou 83,3 %

# Experimento de d’Alembert

D’Alembert tentou aplicar o modelo de Laplace ao experimento de lançar duas moedas e contar o número de caras que ocorrem.

Espaço Amostral S={0,1,2}.

Seguindo o modelo de Laplace, e como o espaço amostral tem três elementos, d'Alembert atribuiu as seguintes probabilidades aos eventos:

- $A_0$ ={0} não sair nenhuma cara , $P(A_0)=1/3$;
- $A_1$ ={1} sair uma cara , $P(A_1)=1/3$;
- $A_2$ ={1} não sair nenhuma cara , $P(A_2)=1/3$

d'Alembert realizou e anotou o resultado dos experimentos e constatou que as frequências relativas de sair 0 caras, sair 1 cara e sair 2 caras não ficavam oscilando em torno de 1/3, por mais que ele fosse repetindo o experimento, como é previsto pela aplicação do modelo de Laplace.

As frequências relativas oscilavam em torno de 1/4, 1/2 e 1/4, respectivamente.

**A previsão de qualquer modelo teórico deve ser confrontada com resultados experimentais**
**Devemos rejeitar a aplicação do modelo de Laplace ao experimento de d'Alembert.**

# Definições Objetivistas de Probabilidade

## Conceito Frequencial de Probabilidades

<u>Proveniente da lei dos grandes números</u>.

A realisação de um único experimento não é sufficiente para avaliar a probabilidade de um evento.

Temos que repetir o experimento um grande número de vezes.

Por exemplo, no lançamento de um dado, a probabilidade do evento A: face 6, sera dada abaixo:

$$P(A) = \frac{\text{numero de 6 obtidos}}{\text{numero de experimentos}} = f$$

## Conceito Frequencial:

Quanto maior o número de observações realizadas mais o valor da frequência observada tenderá ao verdadeiro valor da probabilidade.

## <u>Limitações do Conceito Frequencial</u>

**Necessidade de uma infinidade de realisações do experimento.**
**Impossibilidade de calcular a probabilidade de eventos não repetíveis (meteorologia)**
**<u>Círculo vicioso:</u> esta definição de probabilidades repousa sobre a lei dos grandes números, mas esta pressupõe a definição de probabilidades.**

# Conceito Subjetivo de Probabilidade

## Medida de Incerteza

Segundo a escola subjetivista a probabilidade objetiva de um evento não existe, ou seja, não é uma grandeza mensurável análoga à massa de um corpo.

A probabilidade é simplesmente uma medida de incerteza podendo variar segundo as circunstâncias e o observador.

A única exigência é que esta medida satisfaça os axiomas do cálculo de probabilidades.

# Probabilidade

Para um evento **E** em **S**, podemos definir a existência de uma função **P** tal que **P** represente a probabilidade que **x** pertença a **E**. Isto é:

$$P(E) = \Pr(x \in E)$$

**Alternativamente, pode ser enunciado:**

Para um evento **E** em **S**, podemos definir a existência de uma função **P** tal que **P** represente a probabilidade de ocorrência de **E**. Isto é:

**P(E) = Pr(ocorrência do evento E)**

Para determinar a probabilidade de um evento, usaremos o ponto de vista das freqüências relativas:

$$P(E) = m(E) / m(S)$$

onde **m(E)** e **m(S)** representam as medidas de **E** e **S.**

# Função Probabilidade

## Axioma de Kolmogorov

Para um evento **E** em **S**, associamos um número positivo entre 0 e 1.
**Uma função P é uma probabilidade se ela satisfazer as propriedades:**

i. P é definida para cada evento **A**, isto é, para cada subconjunto de **S**

ii. P(**A**) é um número entre 0 e 1, $0 \leq P(A) \leq 1$

iii. Se $E_1$ e $E_2$ são eventos disjuntos, tais que $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, tem-se que

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) \qquad \text{(união disjunta)}$$

iv. A probabilidade de ocorrência de um ponto qualquer do espaço amostral S deve ser igual a 1: $P(S)=1$

# Propriedades de Probabilidade

v. para eventos $A_i$; i = 1, 2,...,+∝ mutuamente exclusivos (eventos disjuntos, isto é não tem elementos em comum).

**A probabilidade da união disjunta é a soma das probabilidades dos eventos**

$$A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \quad \Rightarrow \quad P(A) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$$

vi. Se ∅ é o conjunto vazio, P( ∅) = 0;

vii. Se **$B \subset A$** então **$P(B) \leq P(A)$**, em particular se **P(A)=0** então **P(B)=0**

# Soma de Probabilidades

Para os eventos **$E_1$** e **$E_2$ mutuamente exclusivos (disjuntos) $E_1 \cap E_2 = \varnothing$** a soma das probabilidades é dada pela generalização da propriedade 3.

$$\mathbf{P}(\mathbf{E}_1 \cup \mathbf{E}_2 \cup \cdots \cup \mathbf{E}_k) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{P}(\mathbf{E}_i)$$

Se os eventos **$E_1$** e **$E_2$** não são mutuamente exclusivos **($E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$)**, mas são independentes, pode-se demonstrar que:

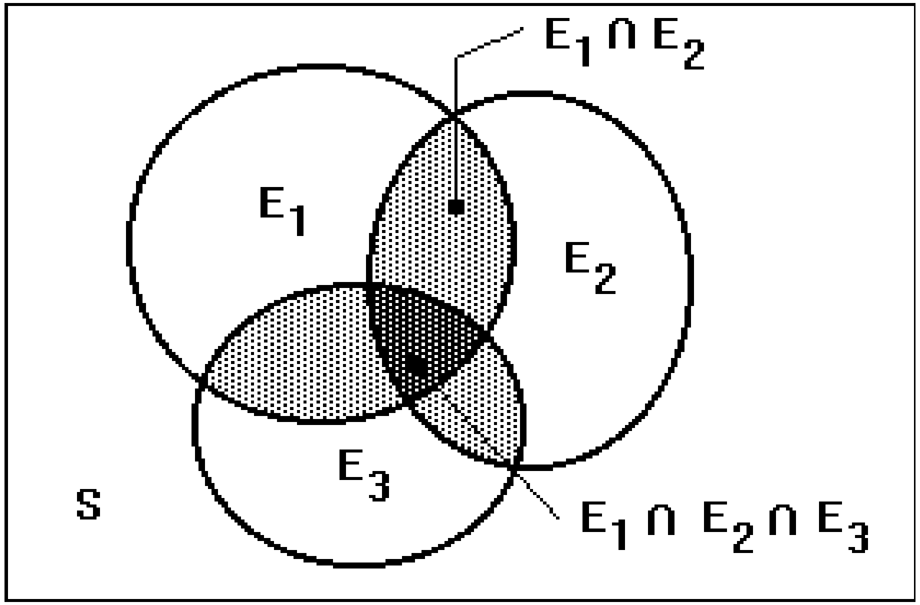
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

# Soma de Probabilidades

Para o caso de três eventos, $E_1$ , $E_2$ e $E_3$ (que não são mutuamente exclusivos) a generalização anterior é:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) =$$

$$P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - [P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_3) + P(E_2 \cap E_3)] + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$



# Desigualdade de Boole

Sejam os eventos $A_1, \ldots, A_n$ eventos. Então

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Um caso em que a desigualdade de Boole é conveniente é quando se quer estimar a probabilidade da realização da união de eventos $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ quando a probabilidade individual destes é pequena.

## Regra do Complemento

A regra do complemento é usada para determinar a probabilidade de um evento ocorrer subtraindo-se a probabilidade do evento não ocorrer de 1.

Seja **P(A)** a probabilidade do evento **A** e $P(\overline{A})$ a probabilidade do evento não A (complemento de A).

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

## Exemplo 5

A companhia de aviação **X** recentemente forneceu a seguinte informação para o Departamento de Aviação Civil (DAC) sobre os vôos da origem **A** ao destino **B**

| Chegada | Freqüência |
|---|---|
| Adiantada | 100 |
| No horário | 800 |
| Atrasada | 75 |
| Cancelado | 25 |
| **TOTAL** | **1000** |

Seja **A** o evento: o vôo chega adiantado

Então **P(A) = 100 / 1000 = 0,1**

Seja **B** o evento: o vôo chega atrasado

Então **P(B) = 75 / 1000 = 0,075**

**Nota:** os eventos **A** e **B** são mutuamente exclusivos. Porque ?

Qual é a probabilidade de que um vôo chegue adiantado ou atrasado?

**P(A ou B) = P(A) + P(B) = 0,1 + 0,075 = 0,175**

## Continuação do Exemplo 5

Seja **C** o evento: o vôo chega no Horário.

Então **P(C) = 800/ 1000 = 0,8**

Seja **D** o evento: o vôo é cancelado.

Então **P(D) = 25 / 1000 = 0,025**

**Nota:** os eventos **C** e **D** são mutuamente exclusivos. Porque ?

Use a regra do complemento para mostrar que a probabilidade do vôo chegar adiantado (**A**) ou atrasado (**B**) é 0,175

**P(A ou B) = 1 – P(C ou D) = 1 – [0,8 + 0,025] = 0,175**

# Exemplo 6

A tabela abaixo fornece algumas informações sobre o número de alunos de um Instituto de Matemática. Considera-se uma estratificação do universo dos alunos em 2 categorias: curso e sexo.

| Curso\Sexo | Homem (H) | Mulher (M) | Total |
|---|---|---|---|
| (P) Matemática | 70 | 40 | 110 |
| (A) Mat. Aplicada | 15 | 15 | 30 |
| (E) Estatística | 10 | 20 | 30 |
| (C) Computação | 20 | 10 | 30 |
| Total | 115 | 85 | 200 |

Consideram-se vários eventos; por exemplo, o evento E é constituído pelos alunos de Estatística ( E=cursa Estatística).
Responda as seguintes questões:

## Continuação do Exemplo 6

1) Qual a probabilidade de um aluno ser de estatística?

$$P(E) = \frac{30\ (\#\ \text{ocorrências aluno de estatística})}{200\ (\#\ \text{ocorrências aluno})} = \frac{15}{100} = 15\%$$

2) Qual a probabilidade de um aluno ser homem? ( Evento H)

$$P(H) = \frac{115}{200} = 57{,}5\%$$

3) Qual a probabilidade de um aluno ser homem **e** de matemática aplicada?

$$P(H \cap A) = \frac{15}{200} = \frac{7{,}5}{100} = 7{,}5\%$$

4) Qual a probabilidade de um aluno ser homem **ou** de matemática aplicada?

$$P(H \cup A) = P(H) + P(A) - P(H \cap A)$$
$$P(H \cup A) = 57{,}5\% + 15\% - 7{,}5\% = 65\%$$

## Continuação do Exemplo 6

5) Qual a probabilidade de um aluno ser de matemática **ou** de computação? Note que os eventos A e C são disjuntos.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$$

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(\Phi)$$

$$P(A \cup C) = \frac{30}{200} + \frac{30}{200} = \frac{60}{200} = \frac{30}{100} = 30\%$$

# Probabilidade Condicional

Seja **E** um experimento com espaço amostral **S** e probabilidade **P**.

Queremos analisar a probabilidade de um evento **A**,

- dado que algum outro evento, **B**, tenha ocorrido.

Essa probabilidade é chamada

- probabilidade do evento **A** <u>condicional</u> à ocorrência do evento **B**.
- Notação **P(A/B)** probabilidade de **A** sabendo **B.**

Para modelar esta situação tem que se levar em consideração que:

- é garantida a ocorrência de um elemento de **B**;
- elementos de **S\B** (espaço amostral sem **B**) não ocorrem

Então, espaço amostral adequado é reduzido de **S** para **B**, e os eventos **A** de **S** passam para os eventos **$(A\cap B)\subset B$.**

# Probabilidade Condicional

Probabilidade do evento **A** condicional à ocorrência do evento **B**:

$$P(A/B) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} & \text{se P(B)} > 0 \\ P(A), & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Verificando as propriedades:

$$P(S/B) = \frac{P(S \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

$$P(\bigcup_i A_i / B) = \frac{P\left[\left(\bigcup_i A_i\right) \cap B\right]}{P(B)} = \frac{P\left[\bigcup_i (A_i \cap B)\right]}{P(B)}$$

$$\sum_i \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_i P(A_i / B)$$

# Regra do Produto de Probabilidades

À partir da noção de probabilidade condicional poderemos obter a regra do produto de probabilidades:

$$P(A \cap B) = P(A/B) \cdot P(B)$$

A regra do produto pode ser usada quando temos experimentos que ocorrem em sequência (ou em etapas) e estamos interessados na probabilidade dos dois eventos, em cada uma das etapas, ocorrerem, isto é, na probabilidade de ocorrência simultânea dos dois eventos.

Sejam os $\mathbf{A_1}$ o evento da 1ª etapa e $\mathbf{A_2}$ o evento da 2ª etapa.

Então:

$$\mathbf{P(A_2 \cap A_1) = P(A_2/A_1).P(A_1)}$$

**ou**

$$\mathbf{P(A_2 \cap A_1) = P(A_1).P(A_2/A_1)}$$

$\Downarrow$ 1ª Etapa $\Downarrow$ 2ª Etapa

## Observações sobre a Regra do Produto de Probabilidades

1) A regra do produto de probabilidades admite uma generalização para 3 ou mais eventos Sejam os eventos **A**,**B**,**C** e **D**, então:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A).P(B/A).P(C/(A \cap B))$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A).P(B/A).P(C/(A \cap B)).P(D/(A \cap B \cap C))$$

2) Quando temos eventos sequenciais, $A_1$, $A_2$, $A_3$, onde $A_1$ ocorre primeiro, e depois $A_2$ e em seguida $A_3$, a probabilidade que os três ocorram é:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/(A_1 \cap A_2))$$

3) Esta regra admite generalização para 4 ou mais eventos sequênciais. Se $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ são eventos que ocorrem em sequência.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1).P(A_2/A_1).P(A_3/(A_1 \cap A_2)).P(A_4/(A_1 \cap A_2 \cap A_3))$$

## Exemplo 7

Qual a probabilidade de saírem 2 cartas de copas em uma extração de 2 cartas de um baralho, sem reposição?

Considere os eventos:

•A sair carta de copas na 1ª retirada;

•B sair carta de copas na 2ª retirada.

O evento de interesse é a ocorrência simultânea de A e de B (A∩B).

$$P(A) = \frac{\text{ocorrências favoraveis a A}}{\text{total de ocorrências possiveis}} = \frac{13\text{(cartas de copas)}}{52\text{(total de cartas)}}$$

$$P(B/A) = \frac{\text{ocorrências favoraveis a B/A}}{\text{total de ocorrências possiveis}} = \frac{12\text{(cartas de copas - 1)}}{51\text{(total de cartas - 1)}}$$

Usando a regra do produto temos:

$$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = \frac{12}{51} \cdot \frac{13}{52}$$

# Exemplo 8

Uma faculdade coletou a seguinte informação sobre seus estudantes de graduação:

| Curso | Homens | Mulheres | Total |
|---|---|---|---|
| Contabilidade | 120 | 80 | 200 |
| Finanças | 110 | 70 | 180 |
| Marketing | 70 | 50 | 120 |
| Administração | 110 | 100 | 210 |
| Estatística | 50 | 10 | 60 |
| Computação | 140 | 90 | 230 |
| Total | 600 | 400 | 1000 |

Um estudante é selecionado ao acaso.

1. Qual é a probabilidade de que o(a) estudante seja mulher e que esteja cursando Contabilidade?

Seja **A** o evento: o(a) estudante está cursando Contabilidade e **F** o evento: o(a) estudante é mulher.

$$P(A \cap F) = 80 / 1000$$

2. Qual é a probabilidade de selecionar uma mulher ? **$P(F) = 400 / 1000$**

# Continuação do Exemplo 8

Uma faculdade coletou a seguinte informação sobre seus estudantes de graduação:

| Curso | Homens | Mulheres | Total |
|---|---|---|---|
| Contabilidade | 120 | 80 | 200 |
| Finanças | 110 | 70 | 180 |
| Marketing | 70 | 50 | 120 |
| Administração | 110 | 100 | 210 |
| Estatística | 50 | 10 | 60 |
| Computação | 140 | 90 | 230 |
| Total | 600 | 400 | 1000 |

Um estudante é selecionado ao acaso.

3. Dado que o(a) estudante é mulher, qual é a probabilidade de que esteja cursando Contabilidade ?

Precisamos calcular **P(A / F)**

$$P(A / F) = P(A \cap F) / P(F) = [80 / 1000] / [400 / 1000] = 0{,}20$$

## Eventos Independentes

O evento **A** é independente de **B** se: $P(A/B) = P(A)$

O conhecimento de **B** não altera as chances de realisação de **A**.

Igualmente: $P(B/A) = P(B)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$$

$$P(A/B) = P(A)$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

# Confusão entre independência e disjunção

É comum a confusão entre independência e disjunção.

Independência e disjunção são conceitos distintos.

- Se **A** e **B** forem eventos disjuntos,
  - Então **A** e **B** serão independentes se e só se **P(A) = 0** ou **P(B) = 0**.
  - Se **A** e **B** tem probabilidade de ocorrência não nula: **P(A) ≠ 0** ou **P(B) ≠ 0** e forem independentes, então sua interseção não pode ser vazia.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

**Propriedades**: Se **A** e **B** são independentes, então também são independentes os eventos:

a) B e $\overline{A}$

b) $\overline{B}$ e $\overline{A}$

c) A e $\overline{B}$

# Exemplo 9

Um dado equilibrado é jogado 2 vezes. Sejam os eventos:

- **A** o 1º dado mostra um número par;
- **B** o 2º dado mostra um 5 ou um 6.

Pergunta: **A** e **B** são independentes?

Claro que são independentes, a ocorrência de um deles não afeta de modo algum a ocorrência do outro: um não tem relação com o outro.

Vamos verificar: **A** e **B** e **A∩B**

$$A = \left\{ \begin{matrix} (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$B = \left\{ \begin{matrix} (1,5) & (1,6) \\ (2,5) & (2,6) \\ (3,5) & (3,6) \\ (4,5) & (4,6) \\ (5,5) & (5,6) \\ (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

$$A \cap B = \left\{ \begin{matrix} (2,5) & (2,6) \\ (4,5) & (4,6) \\ (6,5) & (6,6) \end{matrix} \right\}$$

**Assim :** $P(A \cap B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \qquad P(A)P(B) = \frac{1}{6} \qquad P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6}$$

# Exemplo 10

De um baralho completo retira-se uma carta, anota-se o naipe e devolve-se a carta ao baralho. Retira-se uma segunda carta. Qual a probabilidade de ter saído uma carta de ouros e outra de paus nesta ordem?

Sabendo que oespaço Amostral tem 52×52 elementos:

$$P(A \cap B) = \frac{13 \times 13}{52 \times 52} = \frac{1}{16}$$

Alternativamente, considere os seguintes eventos,

1. **A** retirar uma carta do baralho e ser ouros;
2. **B** retirar uma carta do baralho e sair paus.

Evento de interesse **A∩B** sair ouro e depois sair paus.

**A** e **B** são independentes:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{16}$$

## Exemplo 11

Suponha que um escritório possua 100 máquinas de calcular.
Algumas são elétricas (E) e outras mecânicas (M); algumas novas (N) e outras são muito usadas (U). A tabela informa o número de máquinas em cada classe:

| | E | M | TOTAL |
|---|---|---|---|
| N | 40 | 30 | 70 |
| U | 20 | 10 | 30 |
| TOTAL | 60 | 40 | $\boxed{100}$ |

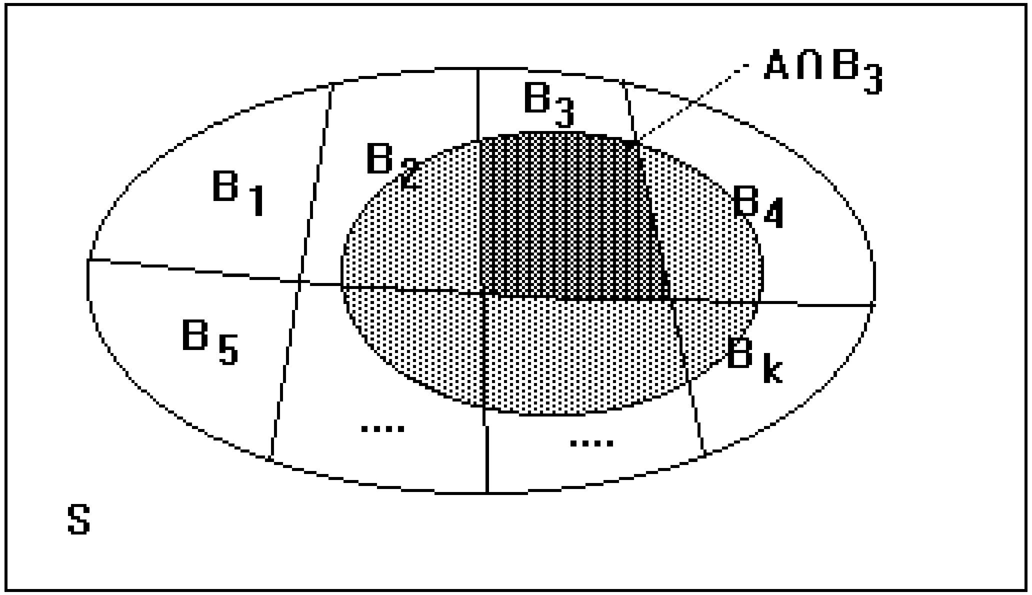
Uma pessoa entra no escritório e pega uma máquina elétrica ao acaso. Qual a probabilidade de que esta seja nova?
Evento máquina nova (N) dado que é elétrica (E), P(N/E)?
Usando a abordagem de Laplace, calculamos as probabilidades baixo:

$$P(N/E) = \frac{P(N \cap E)}{P(E)} = \frac{40/100}{60/100} = \frac{40}{100} = \frac{2}{3}$$

# Probabilidade Total

Considere o espaço amostral **S** contendo o evento **B** que consiste de **k** componentes disjuntos (mutuamente exclusivos), que formam uma partição de **S**:

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k ; \qquad B_i \cap B_j = \varnothing \quad \text{para } i \neq j$$




Considere que um outro evento **A** que pode ou não ocorrer simultaneamente com todos os componentes de **B**.

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots\ldots \cup (A \cap B_k)$$

## Continuação Probabilidade Total

Isso quer dizer que o evento **A** está descrito em forma total pelos componentes **$B_1$....$B_k$** do evento **B**, os quais são disjuntos (mutuamente exclusivos).

Podemos descrever **A** na equação abaixo:

$$A = \bigcup_{i=1}^{k} \left( B_i \cap A \right)$$

Então:

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + \ldots + P(B_k \cap A)$$

$$P(A) = P\left( \bigcup_{i}^{k} (B_i \cap A) \right) = \sum_{i=1}^{k} P\left( A \cap B_i \right)$$

Usando a regra da Multiplicação temos o teorema da Probabilidade Total:

$$P(A) = P(B_1) \,.\, P(A/B_1) + \ldots + P(B_k) \,.\, P(A/B_k)$$

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A / B_i) \cdot P(B_i)$$

# Observações sobre Probabilidade Total

1. Isso quer dizer que a equação da probabilidade de um evento **A** na presença de uma extratificação de **S** é obtida:

   “fatiando-se” o evento **A** nos varios extratos de $\mathbf{B_i}$ de **S**, $\mathbf{A/B_i}$ .

Podemos usar a palavra estratificação do espaço amostral ao invés de partição e cada elemento da partição é um \`extrato' do espaço amostral.

2. Com a regra do produto de probabilidades, este resultado tambem é útil naqueles experimentos que podem ser divididos em etapas:

   $\mathbf{B_i}$ evento definido somente para a 1ª etapa.

   **A** evento definido em termos da 2ª etapa.

Em todo caso, é obrigatorio o fato de que $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$, ...$\mathbf{B_k}$ devem formar uma partição do espaço amostral **S**.

# Exemplos 12 e 13

**Exemplo 12:** Jogue um dado e considere os eventos:

- $A_1$ sair um primo $A_1=\{2,3,5\}$
- $A_2$ sair um par $A_2=\{2,4,6\}$
- $A_3$ sair 1 $A_3=\{1\}$

Verifique se os eventos $A_1, A_2, A_3$ formam uma partição do espaço amostral **S.**

Os eventos $A_1, A_2, A_3$ não formam uma partição de S:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S \quad \text{mas } A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$$

Os eventos são exaustivos mas não excludentes com relação a S.

**Exemplo 13:** Jogue um dado e considere o espaço amostral S={1,2,3,4,5,6}.

Sejam os eventos:

- $B_1$ sair um ímpar $B_1=\{1,3,5\}$
- $B_2$ sair um primo par $B_2=\{2\}$
- $B_3$ sair 4 ou 6 $B_3=\{4,6\}$

Os eventos $B_1, B_2, B_3$ formam uma partição de S.

# Exemplo 14

Considere 2 caixas, cada uma contendo parafusos grandes e pequenos. Suponha que uma **caixa 1** contenha **60 parafusos grandes** e **40 pequenos** e que a outra **caixa 2** contenha **10 parafusos grandes** e **20 pequenos**. Suponha que é escolhida uma caixa ao acaso e dela é retirado um parafuso. Determine a probabilidade de que este seja grande.

Decompomos este experimento em duas etapas:

**1ª Etapa: excolher uma caixa**

Evento $A_1$ sai a caixa 1

Evento $A_2$ sai a caixa 2

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

Os eventos $A_1$ e $A_2$ formam uma partição do espaço amostral.

**2ª Etapa: excolher um parafuso** Evento $B$ o parafuso é grande

Podemos calcular a probabilidade de $B$ usando o teorema da probabilidade total:

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) = \frac{60}{100}\cdot\frac{1}{2} + \frac{10}{30}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{15}$$

A probabilidade de ser escolhido um parafuso grande é 7/15.

## Exemplo 15

Considere um lote de 100 maçãs sendo que 10 são podres e 90 são boas.
Deste lote extraímos em dois dias seguidos uma maçã por dia.
Assumindo que dois dias são insuficientes para as maçãs boas passarem a podres, qual a probabilidade da maçã do 2º dia estar podre?

Decompomos este experimento em duas etapas:

**1ª Etapa: Pegar uma maçã no 1º dia**

**Partição** Evento $\mathbf{A_1}$ sai a maçã é podre

Evento $\mathbf{A_2}$ sai a maçã é boa

Os eventos $\mathbf{A_1}$ e $\mathbf{A_2}$ formam uma partição do espaço amostral.

**2ª Etapa: Pegar uma maçã no 2º dia**

Evento **B** a maçã é podre.

Podemos calcular a probabilidade de **B** usando o teorema da probabilidade total:

$$P(B) = P(B/A_1)\cdot P(A_1) + P(B/A_2)\cdot P(A_2) = \frac{9}{99}\cdot\frac{10}{100} + \frac{10}{99}\cdot\frac{90}{100} = \frac{1}{10}$$

# Teorema de Bayes (Thomas Bayes)

O teorema de Bayes é também chamado de teorema das causas.

É uma consequência da définição de probabilidade condicional.

As fórmulas de Bayes tem o objetivo de expressar **P(A/B)** em função de **P(B/A)**.

**Primeira fórmula de Bayes:**

$$P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$$

A equação acima é obtida pela eliminação de **P(A∩B)** das probabilidades condicionais **P(A/B)** e **P(B/A)** :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{e} \quad P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

# Teorema de Bayes (Thomas Bayes)

Seja **$B_i$** um sistema completo de eventos **$B_1 \ldots . B_k$ ,** uma partição do espaço amostral **S** . Seja **A** um evento qualquer de **S** tal que **P(A) >0**.

Podemos escrever:

$$P(A \cap B_i) = P(A / B_i) \cdot P(B_i)$$

Usando o teorema da Probabilidade Total:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A / B_i) \cdot P(B_i)$$

**Obtemos a Segunda fórmula de Bayes:**

$$P(B_i / A) = \frac{P(A / B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A / B_j) \cdot P(B_j)}$$

# Observações sobre o Teorema de Bayes

1. O teorema de Bayes não afirma nada no caso em que **$P(A) = 0$**, mas neste caso, pela denição de probabilidade condicional, **$P(B_i/A) = P(B_i)$**.
2. Note que, pelo teorema da probabilidade total (slide 41), o quociente na segunda fórmula de Bayes é igual a **$P(A)$**.
3. O teorema de Bayes é útil para experimentos que podem ser divididos em 2 etapas:

   Sejam **$B_j$ , $j=1,\dots,k$ ,** eventos definidos em termos da a 1ª etapa,

   Seja **$A$** evento definido em termos da 2ª etapa.

   O teorema de Bayes fornece uma forma de calcular **$P(B_i/A)$.**

**$P(B_i/A)$** probabilidade de um evento definido em termos da 1ª etapa dado que você conhece o que ocorreu na 2ª etapa.

# Observações sobre o Teorema de Bayes

4. **$P(B_i)$** é chamada probabilidade a priori de **$B_i$** (ou seja, probabilidade antes do conhecimento do que ocorrerá depois no caso, **A**)
5. **$P(B_i/A)$** é chamada de probabilidade *a posteriori* (ou seja probabilidade de um evento sabendo-se o que ocorreu depois no caso, **A**.
6. Usando esta terminologia, nota-se que o teorema de Bayes fornece o valor de uma probabilidade *a posteriori* em função das probabilidades *a priori*.

# Exemplo 16

Três máquinas diferentes $M_1$, $M_2$ e $M_3$ são utilizadas para produzir parafusos do mesmo tipo. Suponha que $M_1$ produz **20%** do total de parafusos, $M_2$ produz **30%** do mesmo total e $M_3$ produz **50%**. Suponha ainda que **1%** dos parafusos produzidos por $M_1$, **2%** de parafusos de $M_2$ e **3%** dos parafusos de $M_3$ são defeituosos. Assuma que um parafuso é escolhido ao acaso de toda a produção e verfica-se que ele é defeituoso. Qual aprobabilidade de ter sido produzido pela máquina $M_2$?

Considere os eventos:

$M_1$ o parafuso é produzido pela máquina 1, $P(M_1)=0,2$

$M_2$ o parafuso é produzido pela máquina 2, $P(M_2)=0,3$

$M_3$ o parafuso é produzido pela máquina 3, $P(M_3)=0,5$

**D** o parafuso é defeituoso.

$$P(D/\ M_1)=0,01;\ P(D/\ M_2)=0,02;\ P(D/\ M_3)=0,03$$

Calcular $P(M_2/D)$, probabilidade do parafuso defeituoso ter vindo da máquina $M_2$, probabilidade a posteriori de $M_2$ .

# Continuação do Exemplo 16

Há duas etapas:

•**1ª Etapa** é a produção do parafuso em uma das máquinas (escolha de uma máquina)

•**2ª Etapa** é a verificação da qualidade do parafuso (se é ou não defeituoso).

$$P(M_2/D) = \frac{P(D/M_2)\cdot P(M_2)}{P(D/M_1)\cdot P(M_1) + P(D/M_2)\cdot P(M_2) + P(D/M_3)\cdot P(M_3)}$$

$$P(M_2/D) = \frac{0{,}02\cdot 0{,}3}{0{,}01\cdot 0{,}2 + 0{,}02\cdot 0{,}3 + 0{,}03\cdot 0{,}5} = \frac{6}{2+6+15} = 26\%$$

## Exemplo 17

Para selecionar seus funcionários, uma empresa oferece aos candidatos um curso de treinamento durante 1 semana. Ao final, eles são submetidos a uma prova e 25% são classificados como bons (**B**), 50% como médios (**M**) e os outros 25% como fracos (**F**).

Como medida de economia, o Departamento de Seleção pretende substituir o treinamento por um teste contendo perguntas envolvendo conhecimentos gerais e específicos, mas, para isso, gostaria de conhecer a probabilidade de que um indivíduo aprovado no teste fosse considerado fraco, caso fizesse o curso. Assim, neste ano, antes do início do curso, os candidatos foram submetidos ao teste e, de acordo com os resultados, receberam os seguintes conceitos:

Aprovado (**A**) et Reprovado (**R**)

As seguintes probabilidades condicionais foram obtidas:

**P(A/B)=0,8**

**P(A/M)=0,5**

**P(A/F)=0,2**

**Sabemos: P(B)=0,25; P(M)=0,50; P(F)=0,25**

Determine **P(F/A)** o candidato ser considerado fraco sabendo que foi aprovado.

# Continuação do Exemplo 17

P(F/A):

$$P(F/A) = \frac{P(A/F)\cdot P(F)}{P(A/B)\cdot P(B) + P(A/M)\cdot P(M) + P(A/F)\cdot P(F)}$$

$$P(F/A) = \frac{0{,}20\cdot 0{,}25}{0{,}80\cdot 0{,}25 + 0{,}50\cdot 0{,}50 + 0{,}20\cdot 0{,}25} = 0{,}10 = 10\%$$

Apenas 10% dos aprovados é que seriam classificados como fracos durante o curso.

# Exemplo 18

Processo de fabricação de semicondutores: contaminação de partículas.
Unidade de fabricação: placas de silício chamadas “wafers”.
Uma inspeção visual realisada nos wafers obtidos apos um processo fabricação de semicondures resultou na tabela abaixo:

| N° de partículas contaminantes | Proporção de wafers |
|---|---|
| 0 | 0,40 |
| 1 | 0,20 |
| 2 | 0,15 |
| 3 | 0,10 |
| 4 | 0,05 |
| 5 ou mais | 0,10 |

Um wafer é selecionado aleatóriamente deste processo e a inspeção é realisada.

a) Qual é a probabilidade de que ele não tenha particulas contaminantes?

**Considere o evento A={0}  P(A) =0,40**

b) Qual é a probabilidade de que o wafer contenha 3 ou mais particulas contaminantes? Seja o evento B={3,4,5 ou mais}:

**P(B) = 0,10+0,05+0,10=0,25**

# Exemplo 19

A tabela abaixo lista o histórico de 940 wafers obtidos após um processo fabricação de semicondutores. Suponha que um wafer é selecionado aleatoriamente.

| Contaminação | Centro | Borda | Total |
|---|---|---|---|
| fraca | 514 | 68 | 582 |
| forte | 112 | 246 | 358 |
| Total | 626 | 314 | |

a) Seja o evento H o wafer tem contaminação forte. Qual é a P(H)?

$$P(H)=358/940=0{,}38$$

b) Seja o evento C, contaminação no centro do wafer. Qual é a P(C)?

$$P(C)=626/940=0{,}67$$

c) Qual é a probabilidade de que o wafer tenha contaminação forte **e** no centro?

$$P(H\cap C)=112/940=0{,}12$$

d) Qual é a probabilidade de que o wafer tenha contaminação forte **ou** no centro?

$$P(H\cup C) = P(H) + P(C) - P(H\cap C)=358/940 + 626/940 - 112/940 = 872/940=0{,}93$$

# Exemplo 20

A tabela abaixo lista o histórico de wafers obtidos após um processo fabricação de semicondutores. Suponha que um wafer é selecionado aleatoriamente.

| N° de partículas | Centro | Borda | Total |
|---|---|---|---|
| 0 | 0,30 | 0,10 | 0,40 |
| 1 | 0,15 | 0,05 | 0,20 |
| 2 | 0,10 | 0,05 | 0,15 |
| 3 | 0,06 | 0,04 | 0,10 |
| 4 | 0,04 | 0,01 | 0,05 |
| 5 ou mais | 0,07 | 0,03 | 0,10 |
| Total | 0,72 | 0,28 | 1,00 |

a) Qual é a probabilidade de que o wafer contenha 4 ou mais particulas (evento A) **ou** de que esta contaminação esteja situada na borda do wafer (evento B)?

$P(A)=0,04+0,07+0,01+0,03=0,15$ $P(B)=0,28$ $P(A \cap B)=0,01+0,03=0,04$

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=0,15+0,28-0,04=0,39$$

## Continuação do Exemplo 20

b) Qual é a probabilidade de que o wafer contenha menos de 2 partículas (evento D) **ou**

**ambos** mais de 4 particulas **e** de que esta contaminação esteja situada na borda do wafer (evento E)?

$$P(D)=0,40+0,20=0,60 \qquad P(E)=0,03 \qquad P(D \cap E)=\varnothing$$

$$P(D \cup E)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)=0,60+0,03=0,63$$

# Exemplo 21

Em um processo de fabricação de películas finas:

- 10 % das unidades contêm falhas de superfície e
- 25% das unidades contendo falhas de superfície são funcionalmente defeituosas.
- apenas 5% das unidades sem falhas de superfície são defeituosas.

Seja o evento D a unidade é defeituosa e o evento F a unidade contém falhas de superfície.

a) Qual é a probabilidade de que a unidade seja defeituosa sabendo que ela contém falhas de superfície P(D/F)? P(D/F)=0,25.

b) Qual é a probabilidade de que uma unidade seja defeituosa sabendo que ela não contém falhas de superfície ?

$$P(D/\overline{F}) = 0,05$$

# Exemplo 22

A tabela abaixo apresenta 400 unidades classificadas por conterem falhas de superfície e serem funcionalmente defeituosas.

Seja o evento D a unidade é defeituosa e o evento F a unidade contém falhas de superfície.

| | Contém Falhas de Superficie | | |
|---|---|---|---|
| **Defeituosa** | **Sim (evento F)** | **Não** | **Total** |
| **Sim(evento D)** | **10** | **18** | **28** |
| **Não** | **30** | **342** | **372** |
| **Total** | **40** | **360** | **400** |

Calcule as seguintes probabilidades: P(F), P(D), P(D/F), P(D∩F), $P(\overline{D}/F)$ $P(D/\overline{F})$ $P(\overline{D}/\overline{F})$

$$P(F) = \frac{40}{400} = 0{,}1 \qquad P(D) = \frac{28}{400} = 0{,}07 \qquad P(F/D) = \frac{10}{28} = 0{,}36$$

$$P(\overline{D}/F) = \frac{30}{40} = 0{,}75$$

$$P(D \cap F) = \frac{10}{400}$$

$$P(D/\overline{F}) = \frac{18}{360} = 0{,}05$$

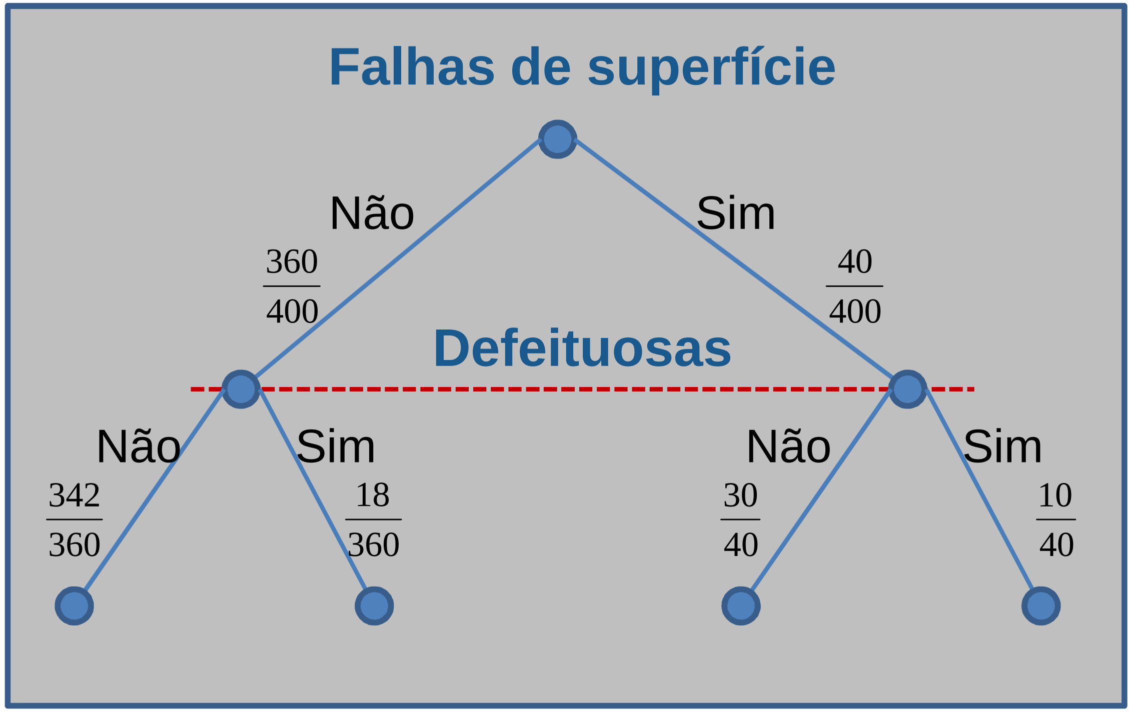
$$P(D/F) = \frac{P(D \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{10}{400}}{\frac{40}{400}} = \frac{10}{40} = 0{,}25$$

$$P(\overline{D}/\overline{F}) = \frac{342}{360} = 0{,}95$$

# Continuação do Exemplo 22

| | Contém Falhas de Superficie | | |
|---|---|---|---|
| **Defeituosa** | **Sim (evento F)** | **Não** | **Total** |
| **Sim(evento D)** | **10** | **18** | **28** |
| **Não** | **30** | **342** | **372** |
| **Total** | **40** | **360** | **400** |

## Árvore de decisão



# Exemplo 23

Em um processo de fabricação são produzidas **850** unidades/batelada, das quais **50** unidades são defeituosas.

a) Duas unidades são selecionadas aleatoriamente de uma batelada sem reposição.

Qual a probabilidade de que a segunda unidade seja defeituosa dado que a primeira unidade é defeituosa?

Seja **A** o evento a primeira unidade é defeituosa e **B** o evento a segunda unidade é defeituosa. Calcule a Probabilidade P(B/A)?

$$P(B/A) = \frac{49}{849} = 0{,}06$$

b) Três unidades são selecionadas aleatoriamente de uma batelada sem reposição.

Qual a probabilidade de que as duas primeiras unidades sejam defeituosas (D) e que a terceira unidade não seja defeituosa (N)?

$$P(DDN) = \frac{50}{850} \cdot \frac{49}{849} \cdot \frac{800}{848} = 0{,}0032$$

# Exemplo 24

A probabilidade de que a primeira etapa do controlador numérico de uma máquina para a fabricação de pistões de alta rotação esteja dentro das especificações de fabricação é de **0,90**.

As falhas são devido às variações do metal, ao alignement do dispositivo elétrico, às condições da lâmina de corte, à vibração e às condições ambientais.

Sabendo que a primeira etapa esta dentro das especificaçõesde fabricação, a probabilidade de que a segunda etapa também esteja dentro das especificações é de **0,95**.

Qual é a probabilidade de que ambas as etapas estejam dentro das especificações?

Sejam os eventos :

**A**=primeira etapa dentro das especificações

**B** =segunda etapa dentro das especificações

Queremos saber **P(A∩B)**.

$$P(A \cap B) = P(B / A)P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}90 = 0{,}855$$

# Exemplo 25

Considere o processo de fabricação de semicondutores: contaminação de partículas.
Uma inspeção visual realisada nos wafers obtidos apos um processo fabricação de semicondures resultou na tabela abaixo:

| Probabilidade de falha | Nível de contaminação | Probabilidade do Nível |
|---|---|---|
| 0,1 | Alto | 0,2 |
| 0,005 | Baixo | 0,8 |

Sejam os eventos:

**F** o evento o produto falha

**H** o evento o "chip" está expoto aos altos níveis de contaminação de partículas.

Qual é a probabilidade de que o produto falhe?

A probabilidade pedida é P (F). Da tabela acima sabemos:

$$P(F/H) = 0{,}10 \qquad P(H) = 0{,}20$$

$$P(F/\overline{H}) = 0{,}005 \qquad P(\overline{H}) = 0{,}8$$

Podemos usar o teorema da probabilidade total:

$$P(F) = P(F \cap H) + P(F \cap \overline{H}) = P(F/H)P(H) + P(F/\overline{H})P(\overline{H})$$

$$P(F) = 0{,}10 \cdot 0{,}20 + 0{,}005 \cdot 0{,}80 = 0{,}024$$

# Exemplo 26

Considere o processo de fabricação de semicondutores: contaminação de partículas.
Uma inspeção visual realisada nos wafers obtidos apos um processo fabricação de semicondures resultou na tabela abaixo:

| Probabilidade de Falhas | Nível de contaminação |
|---|---|
| 0,10 | Alto |
| 0,01 | Médio |
| 0,001 | Baixo |

Os resultados de uma batelada de produção foram:
- **20%** dos chips tiveram níveis de contaminação altos;
- **30%** dos chips tiveram níveis de contaminação médios;
- **50%** dos chips tiveram níveis de contaminação baixos.

Qual é a probabilidade de que um produto usando um dos chips desta batelada falhe?

Sejam os eventos:
- **F** o produto falha;
- **H** chip com nível de contaminação alto;
- **M** chip com nível de contaminação médio;
- **L** chip com nível de contaminação baixo.

$$P(F) = P(F/H)P(H) + P(F/M)P(M) + P(F/L)P(L)$$

$$\Downarrow$$

$$P(F) = 0{,}1 \cdot 0{,}20 + 0{,}01 \cdot 0{,}30 + 0{,}001 \cdot 0{,}50 = 0{,}0235$$

## Exemplo 27

Em um processo de fabricação são produzidas **850** unidades/batelada, das quais **50** unidades são defeituosas.

a) Duas unidades são selecionadas aleatoriamente de uma batelada, mas a primeira unidade é reposta antes de retirar-se a segunda unidade.

Qual a probabilidade de que a segunda unidade seja defeituosa dado que a primeira unidade é defeituosa?

Seja **A** o evento a primeira unidade é defeituosa e **B** o evento a segunda unidade é defeituosa. Calcule a Probabilidade P(B/A)?

$$P(B/A) = \frac{50}{850} = 0{,}058$$

**Devido a reposição a probabilidade de B não depende da probabilidade de A.**

b) Qual é a probabilidade de que ambas as unidades selecionadas sejam defeituosas?

$$P(A \cap B) = \frac{50}{850} \cdot \frac{50}{850} = 0{,}0035$$

# Exemplo 28

A tabela abaixo apresenta 400 unidades classificadas por conterem falhas de superfície e serem funcionalmente defeituosas.

Seja o evento D a unidade é defeituosa e o evento F a unidade contém falhas de superfície.

| | Contém Falhas de Superficie | | |
|---|---|---|---|
| **Defeituosa** | **Sim (evento F)** | **Não** | **Total** |
| **Sim(evento D)** | **2** | **18** | **20** |
| **Não** | **38** | **342** | **380** |
| **Total** | **40** | **360** | **400** |

Calcule as seguintes probabilidades: P(F), P(D), P(D/F), P(D$\cap$F),

$$P(D/F) = \frac{2}{40} = 0{,}05$$

$$P(D) = \frac{20}{400} = 0{,}05$$

**A probabilidade de D não depende de F.**

$$P(F/D) = \frac{2}{20} = 0{,}10$$

$$P(F) = \frac{40}{400} = 0{,}10$$

**A probabilidade de F não depende de D.**

$$P(D \cap F) = P(F) \cdot P(D) = \frac{2}{40} \cdot \frac{2}{20} = \frac{1}{200} = 0{,}005$$

## Exemplo 29

Em um processo de fabricação são produzidas **850** unidades/batelada, das quais **50** unidades são defeituosas.

a) Duas unidades são selecionadas aleatoriamente de uma batelada, sem reposição.

Seja **A** o evento a primeira unidade é defeituosa e **B** o evento a segunda unidade é defeituosa.

Verifique se os eventos A e B são ou não são independentes.

Do **Exemplo 23** sabemos que:

$$P(B/A)=\frac{49}{849}$$

Os eventos A e B serão independentes se **P(B/A)=P(B)**

$$P(B)=P(B/A)\cdot P(A)+P(B/\overline{A})\cdot P(\overline{A})$$

$$P(B)=\frac{49}{849}\cdot\frac{50}{850}+\frac{50}{849}\cdot\frac{800}{850}=\frac{50}{850}$$

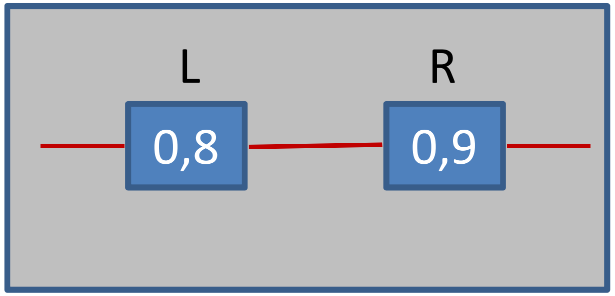
$$P(B/A)\neq P(B)$$

# Exemplo 30

O circuito em série abaixo que opera somente com o trajeto funcional dos dispositivos da esquerda para a direita.

Considere que os dispositivos são independentes quanto a probabilidade de falha.

Qual é a probabilidade de que o circuito opere corretamente?




Sejam os eventos:

- **L** o dispositivo esquerdo funciona corretamente,
- **R** o dispositivo direito funciona corretamente.

A probabilidade de que o circuito opere corretamente:

$$P(L \cap R) = P(L)P(R) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}72$$

# Exemplo 31

Suponha que a probabilidade de que um wafer contenha uma grande partícula de contaminação é de 0.01, e que os wafers são independentes, isto é, a probabilidade de que um wafer contenha uma grande partícula não é dependente das características dos outros wafers.

Se 15 wafers são analisados, qual a probabilidade de que nenhuma grande partícula de contaminação seja encontrada?

Seja o evento **$E_i$** o wafer **$i = 1,2,...,15$** não contêm nenhuma grande partícula de contaminação.

$$P(E_i) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

$\Downarrow$ **Os 15 wafers são independentes**

$$P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{15}) = P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot \cdots \cdot P(E_{15}) = (0{,}99)^{15} = 0{,}86$$

# Exemplo 32

O circuito em paralelo abaixo que opera somente com o trajeto funcional dos dispositivos da esquerda para a direita.

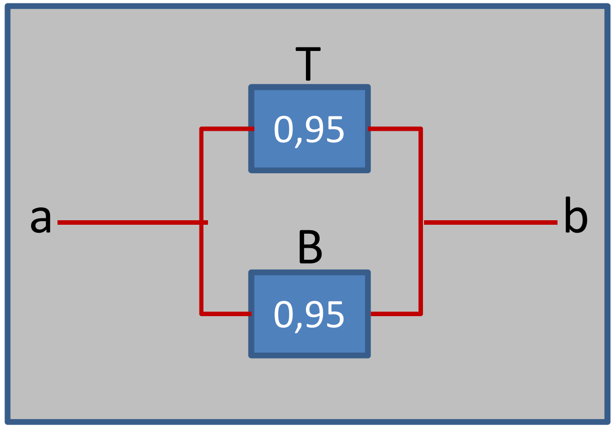
A probabilidade de que cada dispositivo funcione corretamente é dada na figura.

Considere que os dispositivos são independentes quanto a probabilidade de falha.

Qual é a probabilidade de que o circuito opere corretamente?

Sejam os eventos:

- **T** o dispositivo T funciona corretamente,
- **B** o dispositivo B funciona corretamente.




A probabilidade de que o circuito opere corretamente:

Usando a Lei de Morgan: $\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \overline{\mathbf{A}} \cap \overline{\mathbf{B}}$

$$P(T \cup B) = 1 - P(\overline{T \cup B}) = 1 - P(\overline{T} \cap \overline{B})$$

$$P(\overline{T} \cap \overline{B}) = P(\overline{T}) \cdot P(\overline{B}) = (1 - 0{,}95)^2 = (0{,}05)^2$$

$$P(T \cup B) = 1 - (0{,}05)^2 = 0{,}9975$$

# Exemplo 33

Considere o processo de fabricação de semicondutores: contaminação de partículas.
Uma inspeção visual realisada nos wafers obtidos apos um processo fabricação de semicondures resultou na tabela abaixo:

| Probabilidade de falha | Nível de contaminação | Probabilidade do Nível |
|---|---|---|
| 0,1 | Alto | 0,2 |
| 0,005 | Baixo | 0,8 |

Sejam os eventos:

**F** o evento o produto falha

**H** o evento o “chip” está expoto aos altos níveis de contaminação de partículas.

Qual é a probabilidade de que o chip esteja expoto aos altos níveis de contaminação de partículas, sabendo-se que o produto falhou?

A probabilidade pedida é **P (H/F).**

No exemplo 25 calculamos **P(F)=0,024.**

**Aplicando o teorema de Bayes:**

$$P(H/F) = \frac{P(F/H)P(H)}{P(F)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}20}{0{,}024} = 0{,}83$$

# Lista de exercícios

- **Estudo Obrigatório : Lista de exercícios 1**
- **Estudo Opcional (mas importante):**
- Fazer os exemplos e exercícios (6.1 até 6.9) do capitulo 6 teoria elementar de probabilidades do livro:
  - ESTATÍSTICA - 4ª EDIÇÃO - COLEÇÃO SCHAUM MURRAY R. SPIEGEL, LARRY J. STEPHENS - Editora Bookman